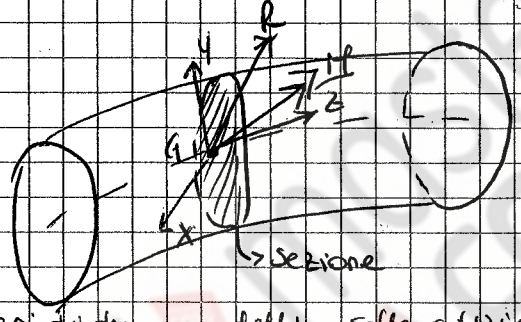
29/09/2011
Prof. Pellegrini

Ricevimento Progetti Ing. Pellegrini
Giovedì mattina DIP. STRUTTURE

RICHIAMI DI SCIENZA delle COSTRUZIONI

Definizione di TRAVE → solido monodimensionale generato da una figura piana di cui baricentro si sposta lungo una curva spaziale che viene detta Linea d'asse, tale che il piano della figura rimane costantemente perpendicolare a questa curva. Viene schematizzato attraverso la Linea d'asse.

Supponiamo di voler conoscere le azioni che si scambiano due sezioni di una trave:



Scarpiano

x, y → assi principali d'inerzia
z → tangente Linea d'asse

Caratteristiche della sulla sezione

$N = \sum F_{zi}$ $\quad M_x = \sum M_{xi}$

$T_x = \sum F_{xi}$ $\quad M_y = \sum M_{yi}$

$T_y = \sum F_{yi}$ $\quad M_z = M_{zi}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

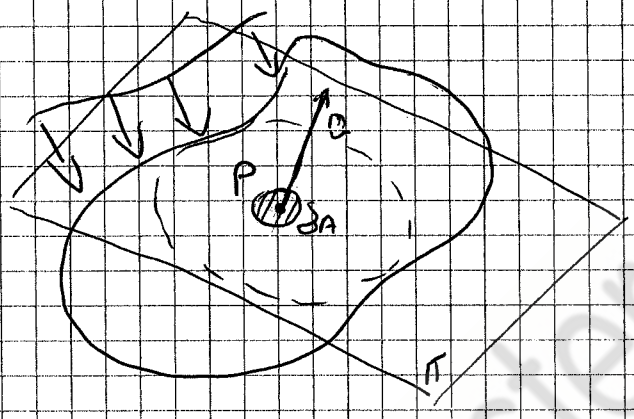
SISTEMA DI TRAVI

- LABILE: $m > m$
- ISOSTATICO: $n = m$
- IPERSTATICO: $m < m$ → si risolve - Teoria dell'elasticità - tensioni e deformazioni

m = gradi di libertà
m = gradi di vincolo

• tensione

Corpo generico sotto una distribuzione generica di forze - sezioniamo il corpo con un piano π, con normale n



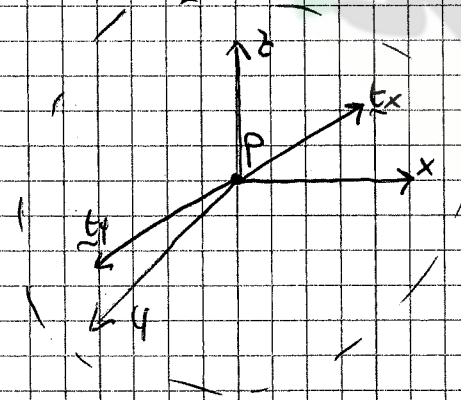
intorno infinitesimo δA
δR, δM → risultanti delle sezioni si scambiano

si assumono che esistano e che siano finiti

$$\lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta R}{\delta A} = t_n \qquad \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta M}{\delta A} = 0$$

tensione relativa a n

TENSIONE → è una astrazione mentale che ci permette di risolvere molti problemi (forza non misurabile sperimentalmente)



t_x si scompone lungo x, lungo y, lungo z

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

Tensore di TENSIONE

Noto questo TENSORE per un punto P posso ricavare una generica sistema di riferimento

$$\underset{\sim}{t_n} = \underset{\approx}{T}\,\underset{\sim}{n}$$

tensore di tensione

→ per trovare la tensione di una generica normale n

si dimostra per equilibrio alla rotazione

TENSORE è SIMMETRICO

$$\begin{cases} \sigma_{ik} = \sum \delta_{ik} \, m_i \, m_k \\ \varepsilon_{mn} = \sum \delta_{ik} \, m_i \, m_k \end{cases}$$

m_i, m_k → direzioni coseni direttori

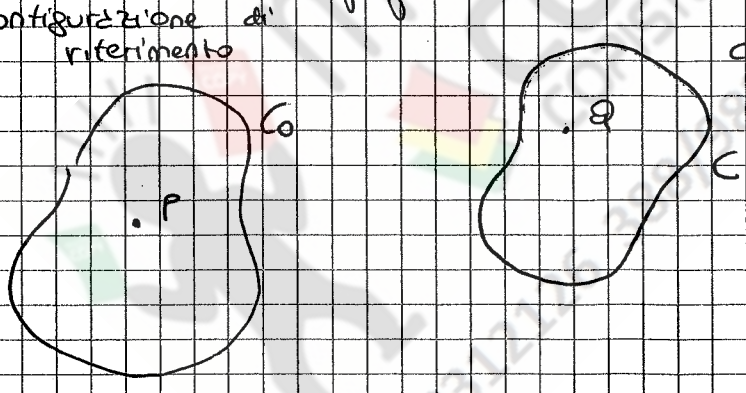
→ Equazioni indefinite di equilibrio

b_k = generiche FORZE DI VOLUME applicate al solido

→ $\sum \sigma_{ik,i} + b_k = 0$ all'interno del corpo

→ $\sum \sigma_{ik} \, m_k = f_i$ condizioni al contorno

- **deformazione** una trasformazione che associa ad ogni punto P della configurazione di riferimento un punto della configurazione attuale.



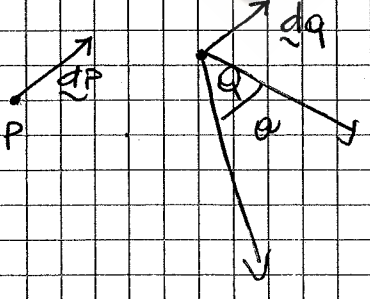
$Q = f(P)$

→ f deve essere CONTINUA

→ " " BIUNIVOCA

→ INVERTIBILE = deve ammettere un inverso

Quindi non possono esserci sovrapposizioni della configurazione deformata del materiale



$\varepsilon_m = \frac{dq - dP}{dP} = \frac{dq}{dP} - 1$ dilatazione lineare

$\gamma_{mm} = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ Scorrimento angolare

$P(u, v, w)$

u, v, w = spostamenti che il corpo subisce a seguito della deformazione, lungo gli assi x, y, z

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

deformazione → NUMERO PURO

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

legge di Hooke generalizzata

$$\frac{T}{\Sigma} = \frac{A}{\Sigma} \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

Materiale ELASTICO e ISOTROPO

EQUAZIONI COSTITUTIVE

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

E = modulo di Young

$$[E] = \frac{[F]}{[L]^2}$$

$$E = \frac{N}{\varepsilon_x}$$

rapporto tra sforzo normale applicato e cambiamento di lunghezza

G = modulo di elasticità tang.

$$[G] = \frac{[F]}{[L]^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

rapporto tra le componenti di deformazione trasversali e quelle longitudinali dovute a sforzo normale

ν = numero adimensionale

$$G = \frac{T}{\gamma_{xz}}$$

Idealmente ν può variare

$$-1 < \nu < 0{,}5$$

Noti E, ν, G → consentono di definire lo stato di deformazione associato a tutti i possibili stati tensionali

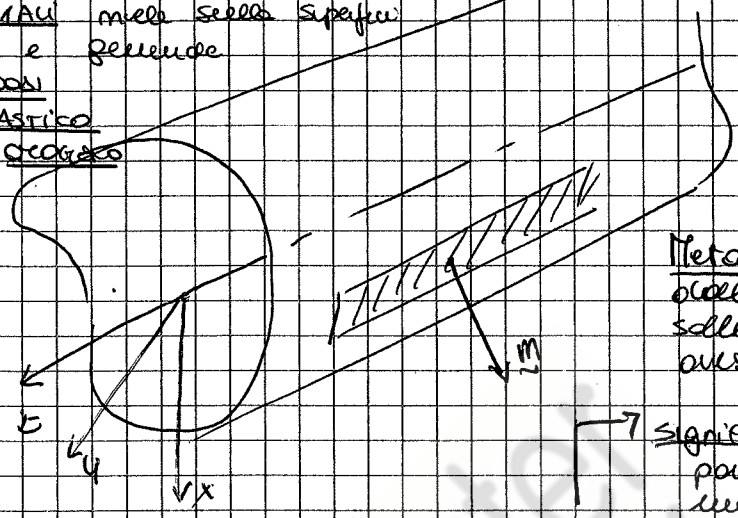
Corpo ELASTICO = un corpo si dice elastico se il lavoro interno per unità di volume non dipende dal percorso di deformazione ma solo dalle deformazioni finali.

Corpo ISOTROPO = le caratteristiche non variano al variare del sistema di riferimento

• PROBLEMA di De Saint Venant

Le ipotesi:

1- SOLIDO CILINDRICO, SOLLECITATO ALL'ESTREMO di lem $A \leq$ lunghezza
2- FORZE DI VOLUME nulle ed V; FORZE SUPERFICIALI nulle sulla superficie laterale e agiscono sulle basi
3- CORPO ELASTICO LINEARE, OMOGENEO ISOTROPO



Metodo semiinverso → partiamo dalle caratteristiche delle sollecitazioni come se le avessimo già trovate

Significato fisico: gli elementi paralleli a z hanno solo uno scambio di tensioni tangenziali e non normali:

Ipotesi di partenza

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} \neq 0$$

Prendo piano parallelo all'asse del solido generale

$$\vec{n} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$$\sigma_n = \sum_{ik} \sigma_{ik}\, n_i\, n_k$$

$$\sigma_n = \sigma_x^2 n_1^2 + \sigma_y^2 n_2^2 + 2\tau_{xy}\, n_1 n_2$$

sulla stessa presa $\perp z$

$\vec{V}$ → Significato → luogo le superficie non ci sono tensioni normali → Vettore tensione locale = vettore tensione tangenziale

Se sappiamo noto il Tensore delle tensioni su P e vale l'ipotesi di partenza di de Saint Venant

$$T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$